حول توزيع الطلب خلال فترة الانتظار عند خضوع الطلب لتوزيع گاما وفترة الانتظار للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي (I)

الأستاذ الدكتور صلاح حمزة عبد
قسم الإحصاء/ الجامعة المستنصرية

مستخلص

سنقوم في هذا البحث باشتقاق توزيع الطلب خلال فترة الانتظار لنظام سيطرة على الخزين يخضع فيه الطلب لتوزيع گاما فيما يخضع وقت الانتظار للتوزيع اللوغايتمي الطبيعي، كما سيتم استخراج العزوم الأساسية لهذا المتغير ، الضرورية بدورها لاستخراج بعض مؤشرات النظام المذكور.

المصطلحات المستخدمة: التكامل المحيط، المستوي المركب، تكامل هانكيل، مستوى إعادة الطلب، الوقاية.

I- المقدمة

قد يكون من الضروري في بعض التطبيقات الإحصائية معرفة بعض خواص مجموع مجموعة من المتغيرات العشوائية ، أي $w=\sum_{i=1}^{N} x_i$ ، حيث أن x_i تمثل متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع و N عبارة عن متغير عشوائي أيضا" مستقل عن x_i . كمثال مهم للتطبيقات الإحصائية للمسالة المذكورة أعلاه ، يمكن الإشارة الى احد حقول بحوث العمليات المهمة الا وهو حقل السيطرة على الخزين، حيث انه إذا مثل x_i الطلب و N وقت الانتظار، فان w سيمثل الطلب خلال فترة الانتظار [4] .

ان الخواص الاحصائية للمتغير w ، وبشكل خاص العزوم ، يمكن الحصول عليها بسهولة من خلال افتراض ان $M_w(t)$ و $M_x(t)$ تمثلان الدالتين المولدة لعزوم المتغيرين w و x على التوالي، وان $P_N(t)$ تمثل الدالة المولدة الاحتمالية للمتغير N ، ليكون ،

$$\begin{aligned} M_w(t) &= E\left[M_{xi}(t)\right]^N \\ &= P_N\left[M_{xi}(t)\right] \qquad -----(1) \end{aligned}$$

ومن خلال المعادلة (1) اعلاه ، يمكن الحصول على توقع وتباين المتغير w بالشكل [1] ،

$$\left.\begin{aligned} E(w) &= E(x)..E(N) \\ Var(w) &= \left[E(x)\right]^2 Var(N) + E(N)Var(x) \end{aligned}\right\} \qquad -----(2)$$

والمعادلتين الاخيرتين في (2) اعلاه تعتبران الاساس في تحديد نقطة اعادة الطلب **Reorder Level** في نظام السيطرة المخزنية .

إن من المهم جدا" تحديد توزيع الطلب خلال فترة الانتظار وذلك لاعتماد الكثير من المؤشرات في نظام السيطرة المخزنية عليه ، مثل احتمال تجاوز الطلب لحجم الاحتياطي ، أو احتمال عدم تلبية الطلب ، وغيرها . [1,2,4,5]

I.1- هدف البحث

لنفترض ان توزيع الطلب هو $f(x)$ $\{0 \le x \le \infty\}$ ، وان توزيع وقت الانتظار هو $g(N)$ حيث ان $0 \le N \le N^*$ ، فان توزيع الطلب خلال فترة الانتظار سيكون ،

$$\int_0^{N^*} f(x)_N \; g(N) \; dN \qquad -----(3)$$

حيث ان $f(x)_N$ يمثل تلفيف الدالة $f(x)$ ، N من المرات { N-fold convolution of f(x) } .

فاذا افترضنا ان توزيع المتغير العشوائي N هو لوغاريتمي طبيعي وان توزيع المتغير العشوائي x هو كاما ، فاننا نذكر ما يلي:

a) ان العديد من الباحثين والمهتمين في في هذا المجال قد اجمعوا على ان التكامل في (3) اعلاه سيكون من المستحيل حله تحت هذا الفرض، وللتفاصيل انظر المصدر [2] ص 508 و ص 512 والمصدر [7] ص 64.

b) ان مشكلة تحديد توزيع للطلب خلال فترة الانتظار تواجه حاليا" المنشأة العامة لتوزيع كهرباء بغداد وان بعض اصناف نظام الخزين لديهم يتمثل فيه توزيع كاما للطلب وتوزيع لوغاريتمي طبيعي لوقت الانتظار .

c) قامت المنشأة بعرض المشكلة امام الباحثين، وقام احد طلبة الدكتوراه في قسم الاحصاء في الجامعة المستنصرية بالتصدي لهذه المشكلة ليشكل حلها هدف اطروحته [7] . لقد عرض الطالب المذكور بعض جوانب الحل العددي للمشكلة دون التوصل الى حلها رياضيا"، {وكما يشير هو نفسه الى ذلك في اكثر من صفحة من اطروحته}، علما" ان الباحث المذكور قد راجع جهات اكاديمية مختلفة واساتذة متميزين في الرياضيات والاحصاء ولكن دون جدوى، اذ اشاروا عليه بحل المشكلة عدديا" وهذا ما حاوله فعلا"، وانا كباحث اعطيه الحق بذلك نظرا" لصعوبة حل المسالة رياضيا" .

d) ان هدف هذا البحث هو هدف كبير من وجهة نظر الباحث اذ انه سيهتم وبشكل نظري بمسالة ايجاد توزيع الطلب خلال فترة الانتظار عند اتباع الطلب لتوزيع كاما واتباع وقت الانتظار للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي ، كما سيتم تعزيز ذلك بدراسة شاملة باستخدام المحاكاة .

II- عزوم الطلب خلال فترة الانتظار

يمكن الحصول على عزوم متغير الطلب خلال فترة الانتظار w من خلال الدالة المولدة لعزوم هذا المتغير والتي سنستخرجها من خلال النظرية التالية ،

نظرية (1) الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي $w = \sum_{i=1}^{N} x_i$ ، حيث ان N عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي بالمعالم a و b ، وان x_i متغيرات عشوائية مستقلة وتخضع لنفس التوزيع ، اذ ان كل منها يتبع توزيع كاما بالمعالم r و m ، هي عبارة عن ،

$$M_w(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r)^j}{j!} \left[Ln(1-h/m)\right]^j e^{j\,a + j^2 b/2} \qquad -----(4)$$

البرهان

$$P_N(t) = E\left(t^N\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{e^y} \frac{e^{\frac{-(y-a)^2}{2b}}}{\sqrt{2\pi b}}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{e^y Ln(t)} \frac{e^{\frac{-(y-a)^2}{2b}}}{\sqrt{2\pi b}}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(e^y Ln(t)\right)^j}{j!} \cdot \frac{e^{\frac{-(y-a)^2}{2b}}}{\sqrt{2\pi b}}\, dy$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Ln(t))^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{yj} \frac{e^{\frac{-(y-a)^2}{2b}}}{\sqrt{2\pi b}}\, dy = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Ln(t))^j}{j!}\, e^{ja + j^2 b/2}$$

وبما ان $M_x(h) = (1-h/m)^{-r}$ **، فان ،**

$$M_w(h) = P_N(M_x(h)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[Ln(1-h/m)^{-r}\right]^j}{j\,!}\, e^{ja + j^2 b/2}$$

ومنها تنتج المعادلة (4) ، وبذلك نكون قد اتممنا برهان النظرية .

نظرية (2)

بمـــا ان العـــزم المركـــزي مـــن الدرجـــة k حـــول نقطـــة الاصـــل للمتغيـــر N هـــو $\mu_N^*(k) = E\,N^k = e^{ka+k^2 b/2}$ ، وان العـــزم التراكمـــي مـــن الدرجـــة k للمتغيـــر x هـــو $\mu_x^*(k) = r\,(k-1)!\,/\,m^k$ ، فان عزوم المتغير w ستكون ،

(a)

$$M_w^{/}(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r)^j}{j!}\, j\,[Ln(1-h/m)]^{j-1}\, \frac{e^{ja+j^2 b/2}}{1-h/m} . \frac{-1}{m}$$

$$\Rightarrow E(w) = \mu_w^*(1) = M_w^{/}(0) = (r/m)e^{a+b/2}$$

$$= E(x).E(N) = \mu_N^*(1).\mu_x^*(1) \qquad -----(5)$$

(b)

$$M_w^{//}(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-(-r)^j}{m\,j!}\, j\,e^{ja+j^2 b/2} \left\{ \frac{1}{m}\left[Ln(1-h/m)\right]^{j-1}(1-h/m)^{-2} - \frac{(j-1)\left[(1-h/m)\right]^{j-2}}{m.(1-h/m)^2} \right\}$$

وبذلك وعند **j=1** للحد الاول و **j=2** للحد الثاني ، فانه يكون ،

$$M_w^{//}(0) = E(w^2) = \mu_w^*(2) = \frac{r}{m^2}.e^{a+b/2} + \frac{r^2}{m^2}.e^{2a+2b}$$

$$= Var(x).E(N) + (E(x))^2.E(N^2) \qquad -----(6)$$

$$\Rightarrow \; Var(w) = Var(N)\left[E(x)\right]^2 + Var(x).E(N) \qquad -----(7)$$

$$\Rightarrow \quad CV_w \left[\frac{CV_x^2}{E(N)} + CV_N^2 \right]^{1/2} \qquad -----(8)$$

حيث ان CV_w هو معامل اختلاف المتغير w .

(c) $E(w^3) = E(x-\mu_x)^3 E(N) + 3E(x)Var(x)E(N^2) + \left(E(x)\right)^3 E(N^3)$ **-----(9)**

(d)

$$E(w^4) = E(N)\,\mu_x^*(4) + 11\left[Var(x)\right]^2 E(N^2) + 6Var(x)3\left(E(x)\right)^2\ E(N^3) + \left(E(x)\right)^4 E(N^4)$$

--(10)

(e) $E(w^k) = \mu_w^*(k) = \dfrac{1}{m^k}\sum_{j=1}^{k} c_j\ r^j\ e^{ja+j^2b/2} \qquad -----(11)$

(f)

اذا كتبنا $\mu_x^{**}(k) = \dfrac{\mu_x^*(k)}{(k-1)!} = \dfrac{r}{m^k}$ فان ،

$$\mu_w^*(k) = \mu_x^{**}(k).\sum_{j=1}^{k} c_j\ r^{j-1}\ \mu_N^*(j) \qquad -----(12)$$

III- توزيع الطلب خلال فترة الانتظار

من خلال المعادلة (4) التي تمثل معادلة الدالة المولدة لعزوم متغير الطلب خلال فترة الانتظار w ، فيمكن كتابة الدالة المميزة لهذا المتغير بالشكل ،

$$Q_w(h) = E\left(e^{ihw}\right) = M_w(ih)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r)^j}{j\,!}\left[Ln(1-ih/m)\right]^j\ e^{ja+j^2b/2} \qquad -----(13)$$

وعليه يمكن الحصول على دالة كثافة احتمال الطلب خلال فترة الانتظار من خلال حل تكامل فورير التالي،

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihw}\ Q_w(h)\ d\,h \qquad -----(14)$$

وذلك كما في النظرية التالية،

نظرية (3)

اذا كانت المعادلة (13) تمثل الدالة المميزة للمتغير w ، فان دالة كثافة احتمال هذا المتغير ستكون،

$$f(w)=\frac{1}{w}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r^{j}}{j!}e^{ja+j^{2}b/2}\left[\sum_{s_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_j=1}^{\infty}\frac{\left(\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell\right)!}{w\,(wm)^{\sum s_\ell}\prod_{\ell=1}^{j}s_\ell}\right]\quad -----(15)$$

البرهان

باستخدام الصيغة رقم (14) يكون ،

$$f(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ihw}dh+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ihw}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-r)^{j}}{j!}\left[Ln(1-ih/m)\right]^{j}e^{ja+j^{2}b/2}\,dh$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ihw}dh+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-r)^{j}}{j!}e^{ja+j^{2}b/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ihw}\left[Ln(1-ih/m)\right]^{j}dh$$

وباستخدام العلاقة $Ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{\infty}x^{k}/k$ **، فانه يكون ،**

$$f(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ihw}dh+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-r)^{j}}{j!}e^{ja+j^{2}b/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ihw}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(hi/m)^{k}}{k}\right]^{j}dh$$

وبما ان ، $\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(hi/m)^{k}}{k}\right]^{j}=\sum_{s_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_j=1}^{\infty}\frac{(hi/m)^{\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell}}{\prod_{\ell=1}^{j}s_\ell}$ **، فانه يكون ،**

$$f(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ihw}dh+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r^{j}}{j!}e^{ja+j^{2}b/2}\sum_{s_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_j=1}^{\infty}\frac{(-1/m)^{\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell}}{\prod_{\ell=1}^{j}s_\ell}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ihw}(-ih)^{\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell}\,dh$$

ان حدود التكامل في الدالة اعلاه يمكن احتسابها باستخدام التكامل المحيط **counter integration** في المستوي المركب **complex plane** وذلك بعد اخذ التحويل ،

$$z = ihw \quad \Rightarrow \quad h = z/iw \quad , \quad dh = (1/iw)\,dz \qquad ------(16)$$

فيكون ،

$$f(w) = \frac{1}{w}\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z}dz + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{r^j}{j!}e^{ja+j^2b/2}\sum_{s_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_j=1}^{\infty}\frac{(-1/m)^{\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell}}{\prod_{\ell=1}^{j}s_\ell}\,w^{-(\sum s_\ell+1)}\,\frac{i}{2\pi}\int_{+i\infty}^{-i\infty} e^{-z}(-z)^{\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell}\,dz$$

وحيث ان ،

$$\frac{i}{2\pi}\int_{+i\infty}^{-i\infty} e^{-z}(-z)^{\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell}\,dz = \frac{1}{\left(-\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell - 1\right)!} \qquad ------(17)$$

$$= \frac{\left[\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell\right]!}{(-1)^{\sum_{\ell=1}^{j}s_\ell+2}} \qquad ------(18)$$

فاننا نكون قد اتممنا برهان النظرية .

هذا ومما يجدر ذكره بان المتساوية في (17) اعلاه هي عبارة عن تكامل هانكيل (للتفصيل انظر **wilks** عام 1962 ص 118)، وان المتساوية في المعادلة (18) هي ما اعطاها **patil** عام 1982 ص 4 .

نتيجة (3.1)

عندما $b \to 0$ فان $w \cong Gamma\left(r\,e^{a}\ ,\ m\right)$.

البرهان

من المعادلة (13) سيكون ،

$$Q_w(h) \cong \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left[-r\,e^{a}\ Ln(1-ih/m)\right]^j}{j\,!}$$

$$= e^{-r\,e^{a}\ Ln(1-ih/m)} \ = \left[1-ih/m\right]^{-r\,e^{a}}$$

وبذلك نكون قد أتممنا برهان النتيجة .

IV- **امكان التطبيق العملي للبحث في المنشاة العامة لتوزيع كهرباء بغداد**

سبق وتناولنا في الفقرات السابقة عرضا" شاملا" لمشكلة البحث والحل النظري الصرف لها، وسنتناول في هذه الفقرة امكانات التطبيق العملي للبحث في المنشاة العامة لتوزيع كهرباء بغداد حيث تبرز المشكلة.

ان صيغة دالة كثافة الاحتمال لمتغير الطلب خلال فترة الانتظار الواردة في المعادلة (15) يمكن ان تعطي الحل المضبوط (Exact solution)، وذلك عند استخدامها كلها (عمليا")، وبدون بتر لحدودها اللامتناهية، وهذا غير ممكن وغير متوفر في الحاسبات الالكترونية المستخدمة حاليا" على الاقل، وتلك نقطة ضعف فيها .

اما اذا حصل وبترنا الحدود اللامتناهية الى حد معين، فان التقريب عندئذٍ سيحدث، وانه كلما كان البتر يقترب من المالانهاية كلما كان التقريب افضل، وهنا ستبرز مشاكل اخرى منها،

(1) الى أي حد سنبتر للحصول على تقريب مقبول؟ وما هي معايير ذلك ؟

(2) الوقت الكبير المستغرق للحصول على كل قيمة من قيم دالة كثافة الاحتمال.

ومن جانب اخر، ومن خلال المراجعة المستمرة لمديرية بحوث العمليات في المنشاة العامة لتوزيع كهرباء بغداد وبغية التواصل والاطلاع على الواقع العملي الفعلي لديهم، امكن الحصول على المعلومات التالية،

(1) ان الانحراف المعياري للطلب الفصلي (Quarterly demand) σ_d يكون دالة بدلالة متوسط الطلب الفصلي μ_d ، أي ان $f(\mu_d) = \sigma_d$ ، بحيث ان $0.2 \le CV_d \le 1.5$ ، حيث ان $CV_d = \sigma_d / \mu_d$ يمثل معامل الاختلاف للطلب وان μ_d من الممكن ان يقع ضمن الفترة $4 \le \mu_d \le 10000$ ، .

(2) ان متوسط فترة الانتظار μ_ℓ يقع ضمن الفترة $3 \le \mu_\ell \le 5$ ، كما يقع الانحراف المعياري لها σ_ℓ ضمن الفترة $1.5 \le \sigma_\ell \le 3$.

وحيث ان فترة الانتظار تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي فانه يمكن كتابة ،

$$\mu_\ell = e^{a+b/2}$$

$$\mu_\ell^2 + \sigma_\ell^2 = e^{2a+2b}$$

وبحل المعادلتين اعلاه انيا" فانه يمكن الحصول على ،

$$b = Ln\left(\mu_\ell^2 + \sigma_\ell^2\right) - Ln\left(\mu_\ell^2\right)$$

$$= Ln\left[\frac{\sigma_\ell^2}{\mu_\ell^2} + 1\right]$$

ومما ورد اعلاه ، فانه يمكن كتابة $0.086 \le b \le 0.69$ ، ليمكن تطبيق النتيجة (3.1) على العديد من المواد المخزنية التي تحقق فروض البحث المذكورة انفا" .

المصادر

1) Burgin , T.A. (1972) "Inventory control with Normal demand and Gamma lead times" ; Op.res.Quart., Vol.23 , No.1 , March , PP.73-81 .
2) ___________ (1975) " The Gamma distribution and inventory control " ; Op. Res. Quart. Vol.26 , No.3 , September , PP.507-527 .
3) Patil , G.P. & Boswell , M.T. & Joshi , S.W. and Ratnaparkhi , M.V. (1984) " Dictionary Of statistical distributions " ; Vol.1 : Discrete Models . ICPH Series .
4) Ray , W.D. (1980) " The significance of correlated demands and variable lead times for stock control policies " ; J. Opl. Res. Soc. , Vol.31 , PP.187-190 .
5) _________ (1981) " computation of reorder levels when the demands are correlated and the lead time random "; J. Opl. Res. Soc. , Vol.32 , PP.27-31.
6) Wilks , S. (1962) " Mathematical Statistics " , Wiley series , USA .

7) راهي ، عبد الرحيم خلف (1997) " تحديد توزيع الطلب خلال فترة الانتظار عندما يكون كلاهما احتمالياً " ، اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية .